



Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017 Mathematik

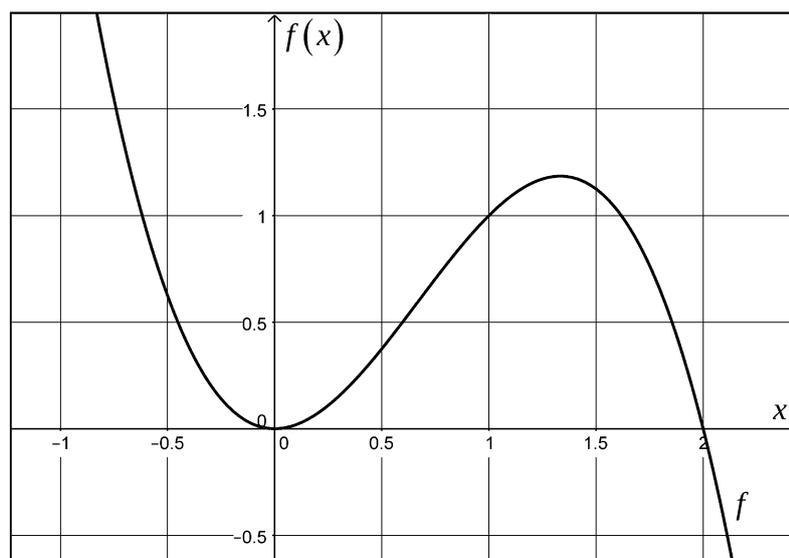
Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -x^3 + 2 \cdot x^2, x \in \mathbb{R}.$$

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von f .



Abbildung

a) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1|1)$.

(4 Punkte)

b) (1) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes A an, in dem der Graph von f die Steigung Null hat.

(2) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes $B(x_B|y_B)$ an, so dass die Ableitung von f an der Stelle x_B negativ ist.

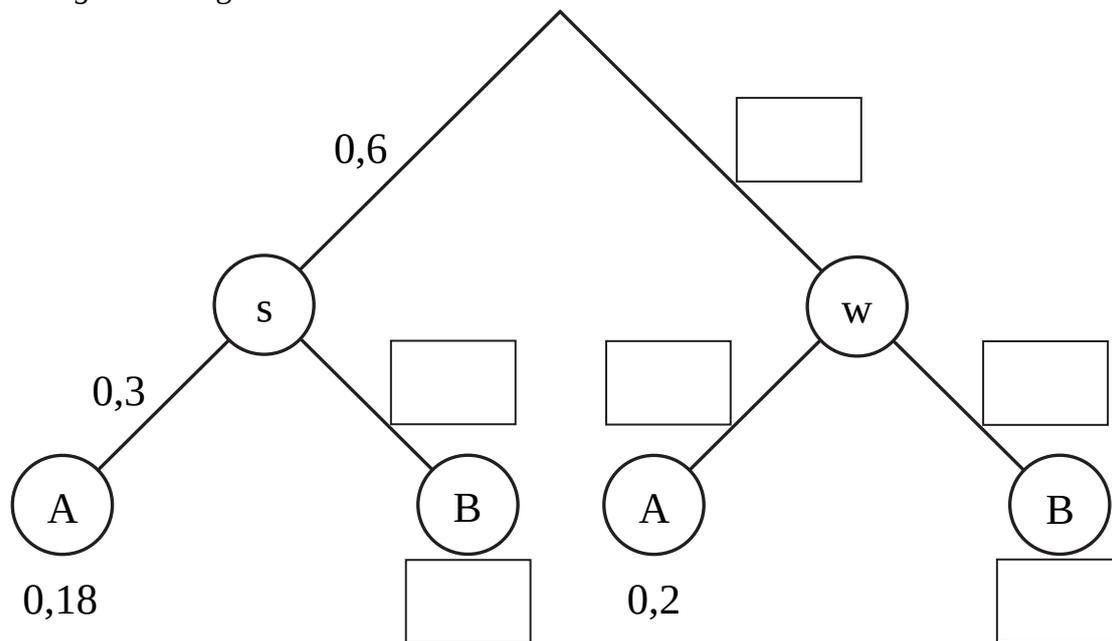
(1 + 1 Punkte)



Name: _____

Aufgabe 2:

In einer Urne befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln, die zusätzlich entweder mit dem Buchstaben A oder dem Buchstaben B beschriftet sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Dieses Zufallsexperiment ist in dem folgenden unvollständig beschrifteten *Baumdiagramm* dargestellt.



Baumdiagramm

a) Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Rechtecken im Baumdiagramm an.

(4 Punkte)

b) Von der gezogenen Kugel wird zunächst nur bekannt gegeben, dass sie mit dem Buchstaben A beschriftet ist.

Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass es sich um eine schwarze Kugel handelt.

[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.]

(2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.



Name: _____

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017 Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 2, x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie (gerundet auf zwei Nachkommastellen) die Nullstellen der Funktion f .

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass $x = 2$ eine lokale Minimalstelle der Funktion f ist.

(6 Punkte)

c) Ausgehend von der Funktion f ist eine neue Funktion g mit der Gleichung

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{3}{2} \cdot x \\ &= \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + 2, x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben. Die *Abbildung 1* auf der folgenden Seite zeigt den Graphen von f , die *Abbildung 2* zeigt den Graphen von g .

Nennen Sie zwei Unterschiede der Graphen von f und g .



Name: _____

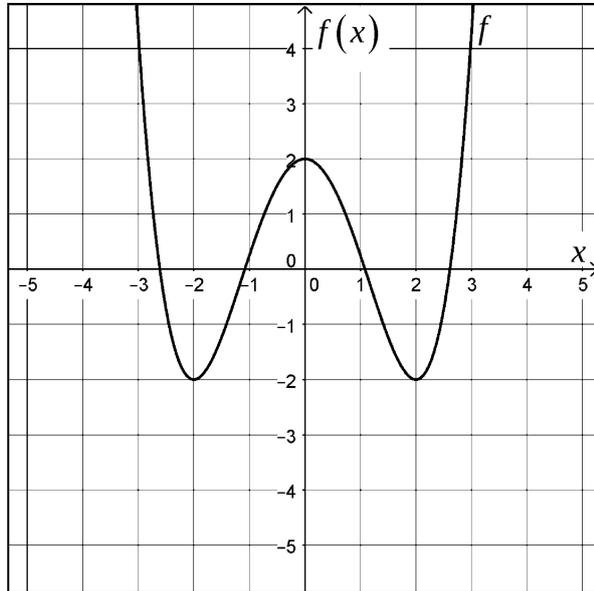


Abbildung 1

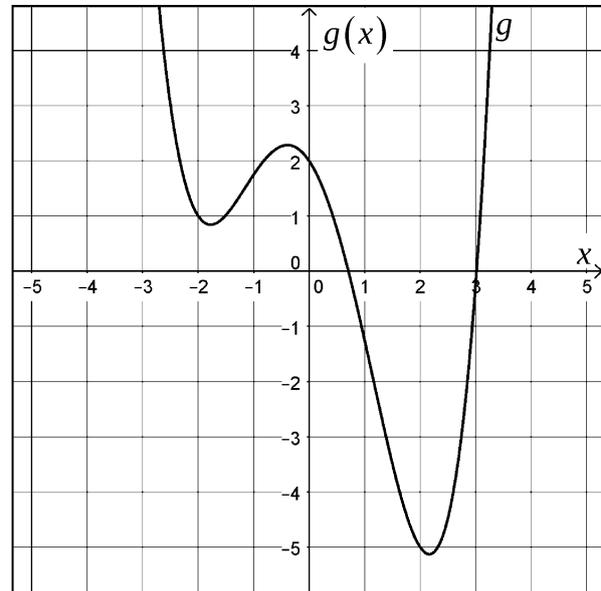


Abbildung 2

(4 Punkte)

- d) Die Gerade $t: y = -\frac{3}{2} \cdot x - 2$ ist die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(-2|1)$.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass t die Tangente an den Graphen von g im Punkt P ist, ist nicht erforderlich.]

- (1) Zeichnen Sie die Tangente t in die Abbildung 2 ein.
- (2) Zeigen Sie rechnerisch, dass t auch in einem weiteren Punkt Q Tangente an den Graphen von g ist.

(2 + 6 Punkte)

- e) Der Graph von g wird nun um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Der verschobene Graph wird anschließend so weit nach unten verschoben, bis die Gerade t in zwei Punkten Tangente an den neuen Graphen ist.

Geben Sie an, um wie viele Einheiten der nach rechts verschobene Graph dazu nach unten verschoben werden muss, und begründen Sie Ihre Angabe.

(3 Punkte)



Name: _____

Aufgabe 4:

Ausgehend von den Daten aus einer Statistik der Vereinten Nationen kann das Durchschnittsalter der Bevölkerung in einem Land A mit Hilfe der Funktion a mit der Gleichung

$$a(t) = -0,00011 \cdot t^3 + 0,0186 \cdot t^2 - 0,538 \cdot t + 24, \quad t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit 1950 und $a(t)$ das zugehörige Durchschnittsalter in Jahren. Mit der Funktion a können Prognosen bis zum Jahr 2030 erstellt werden.

Der Graph von a ist in *Abbildung 1* dargestellt.

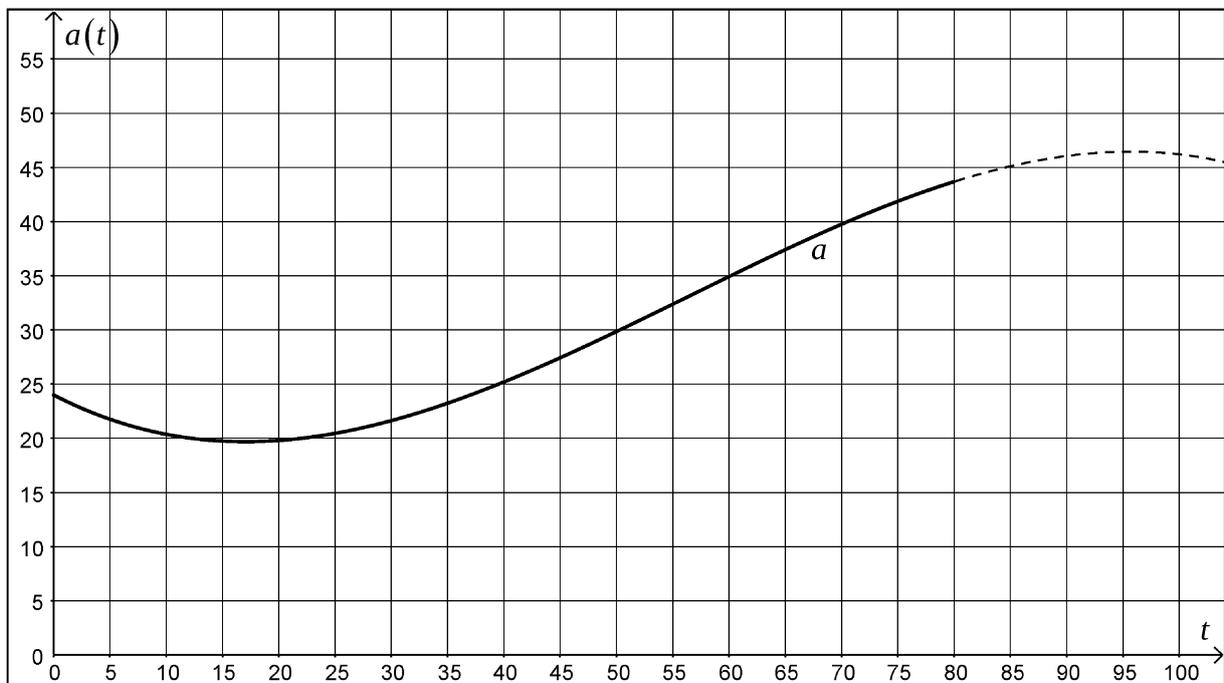


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 1950 ($t = 0$) und den Prognosewert für das Jahr 2030 ($t = 80$).

(4 Punkte)

b) Ermitteln Sie rechnerisch das niedrigste Durchschnittsalter der Bevölkerung im Zeitraum von 1950 bis 2030.

(8 Punkte)



Name: _____

- c) Die Entwicklung des Durchschnittsalters der Bevölkerung im Zeitraum von 2030 bis 2050 soll durch die Tangente an den Graphen von a an der Stelle $t = 80$ modelliert werden.

Ermitteln Sie in *Abbildung 1* zeichnerisch näherungsweise das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 2050.

(3 Punkte)

- d) In einem anderen Land B stimmte für das Jahr 1950 ($t = 0$) das Durchschnittsalter der Bevölkerung nahezu mit dem Durchschnittsalter in dem Land A überein. Die Rate, mit der sich das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B ändert, ist in der folgenden *Abbildung 2* dargestellt.

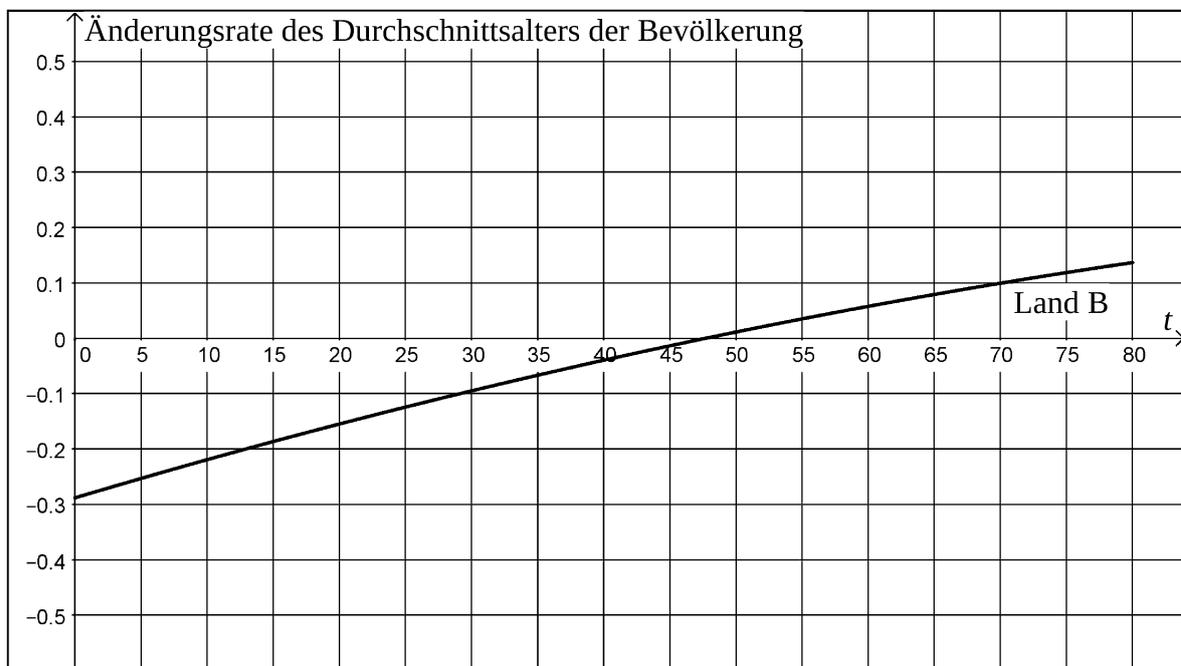


Abbildung 2

- (1) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B wächst von 1950 bis 2030 durchgängig.

- (2) Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion a' in die *Abbildung 2* ein und geben Sie die Bedeutung von $a'(t)$ im Sachzusammenhang an.

- (3) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Im Jahr 2020 wächst das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A schneller als in dem Land B.

(2 + 5 + 2 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase

2017

Mathematik

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Stochastik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (Innermathematische Argumentationsaufgabe)

Aufgabe 4: Analysis (Aufgabe mit realitätsnahe Kontext)

2. Aufgabenstellung ¹

siehe Prüfungsaufgaben

3. Materialgrundlage

entfällt

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.



4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen
(Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei)

Inhaltsfeld Stochastik (S)

- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

5. Zugelassene Hilfsmittel

Prüfungsteil A:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Prüfungsteil B:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computeralgebrasystem)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).



Aufgabe 1:

Modelllösung a)

Ansatz: $t: y = m \cdot x + b$.

$$f'(x) = -3 \cdot x^2 + 4 \cdot x.$$

$$m = f'(1) = 1.$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P(1|1)$ liefert:

$$1 = 1 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Damit ist eine Gleichung der Tangente $t: y = x$.

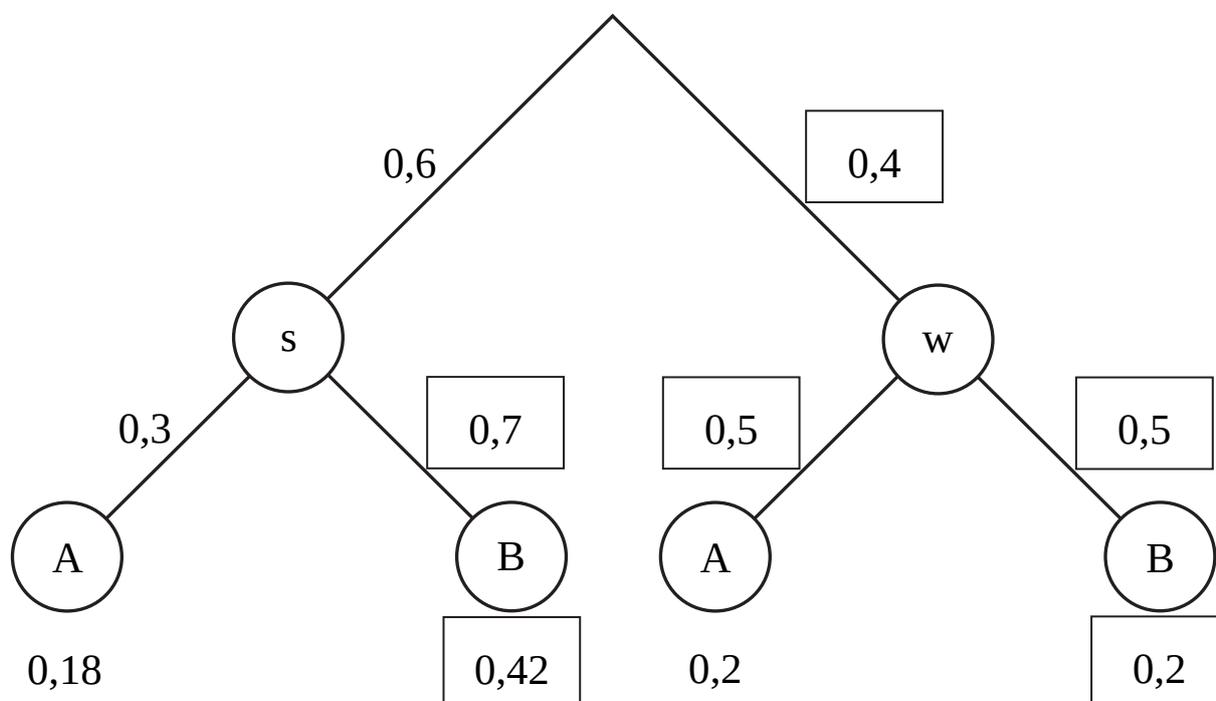
Modelllösung b)

(1) Ein Punkt, in dem der Graph von f die Steigung Null hat, ist z. B. $A(0|0)$.

(2) Ein Punkt, für den die Ableitung an der zugehörigen Stelle negativ ist, ist z. B. $B(2|0)$.

Aufgabe 2:

Modelllösung a)





Modelllösung b)

$$P(s|A) = \frac{0,18}{0,18 + 0,2}$$
$$\left(= \frac{0,18}{0,38} \right).$$

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

Aus der Gleichung $f(x) = 0$ ergeben sich mit dem GTR/CAS vier Nullstellen x_{N_1} , x_{N_2} , x_{N_3} und x_{N_4} mit $x_{N_1} \approx -2,61$, $x_{N_2} \approx -1,08$, $x_{N_3} \approx 1,08$ und $x_{N_4} \approx 2,61$.

Modelllösung b)

$$f'(x) = x^3 - 4 \cdot x.$$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die drei Lösungen $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$.

Da zusätzlich $f'(1) = -3 < 0$ und $f'(3) = 15 > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' vor. $x = 2$ ist also eine lokale Minimalstelle von f .

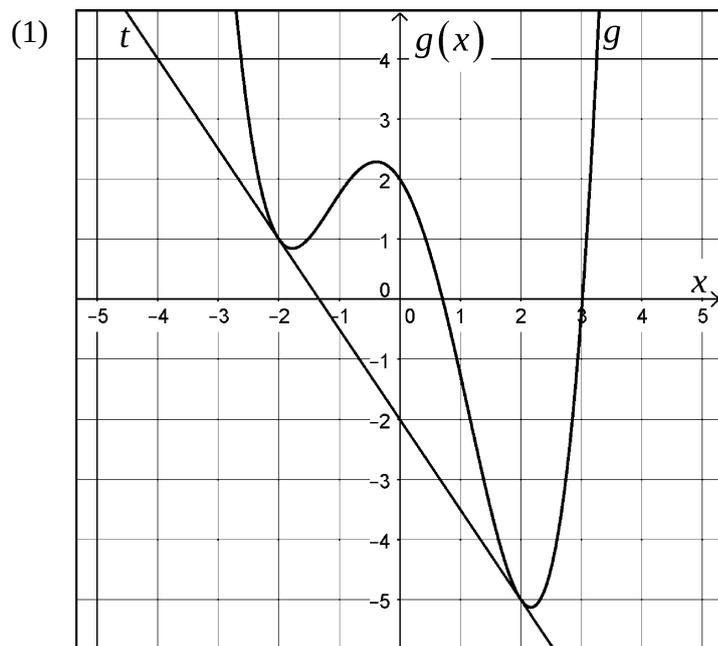
Modelllösung c)

Beispiele für Unterschiede:

- Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y -Achse, der Graph von g weist keine Symmetrie auf.
- Beim Graphen von f stimmen die y -Koordinaten der beiden Tiefpunkte überein, beim Graphen von g unterscheiden sich die y -Koordinaten der beiden Tiefpunkte.
- Beim Graphen von f sind die y -Koordinaten aller Extrempunkte ganzzahlig, beim Graphen von g sind die y -Koordinaten der Extrempunkte nicht ganzzahlig.
- Die y -Koordinaten aller Punkte auf dem Graphen von f sind größer oder gleich -2 , es gibt Punkte auf dem Graphen von g , deren y -Koordinaten kleiner als -2 sind.
- Der Graph von f schneidet die x -Achse in vier Punkten, der Graph von g schneidet die x -Achse nur in zwei Punkten.



Modelllösung d)



(2) $g'(x) = x^3 - 4 \cdot x - \frac{3}{2}$.

Die Gleichung $\frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + 2 = -\frac{3}{2} \cdot x - 2$ hat die beiden Lösungen $x = -2$ und $x = 2$. Der Punkt $Q(2 | g(2))$ ist also ein weiterer gemeinsamer Punkt des Graphen von g und der Geraden t .

Wegen $g'(2) = -\frac{3}{2}$ stimmt die Steigung des Graphen von g im Punkt Q mit der Steigung der Geraden t überein.

t ist also auch Tangente an den Graphen von g im Punkt $Q(2 | g(2))$.

Oder:

Die Gleichung $x^3 - 4 \cdot x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ hat die drei Lösungen $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$. Die Punkte $Q(2 | g(2))$ und $R(0 | g(0))$ sind also weitere Punkte, in denen die Steigung des Graphen von g mit der Steigung der Geraden t übereinstimmt.

Wegen $g(2) = -5$ und $-\frac{3}{2} \cdot 2 - 2 = -5$ ist der Punkt Q auch ein gemeinsamer Punkt des Graphen von g und der Geraden t .

t ist also auch Tangente an den Graphen von g im Punkt $Q(2 | g(2))$.



[Auch eine Lösung, bei der aufgrund der Zeichnung eine Vermutung über die Lage des Punktes Q gewonnen wird, und dann ein rechnerischer Nachweis erfolgt, ist hier zulässig.]

Modelllösung e)

Der nach rechts verschobene Graph muss um $-\frac{3}{2} \cdot 2$ Einheiten in y -Richtung, also um 3 Einheiten nach unten verschoben werden.

Die Gerade t ist eine Tangente an den Graphen von g in zwei Punkten. Wenn durch die Hintereinanderausführung der beiden Verschiebungen eine Verschiebung des Graphen von g entlang der Tangente t erzeugt wird, dann ist t auch die Tangente an den verschobenen Graphen in zwei Punkten.

Aufgabe 4:

(Hinweis: Daten zur Bevölkerungsentwicklung findet man unter dem Link:

https://esa.un.org/unpd/wpp/Publications/Files/WPP2015_Volume-II-Demographic-Profiles.pdf - Letzter Zugriff: 24. Mai 2017)

Modelllösung a)

$$a(0) = 24.$$

Im Jahr 1950 betrug das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A 24 Jahre.

$$a(80) = 43,68.$$

Für das Jahr 2030 wird für das Land A ein Durchschnittsalter der Bevölkerung von 43,68 Jahren prognostiziert.



Modellösung b)

$$a'(t) = -0,00033 \cdot t^2 + 0,0372 \cdot t - 0,538.$$

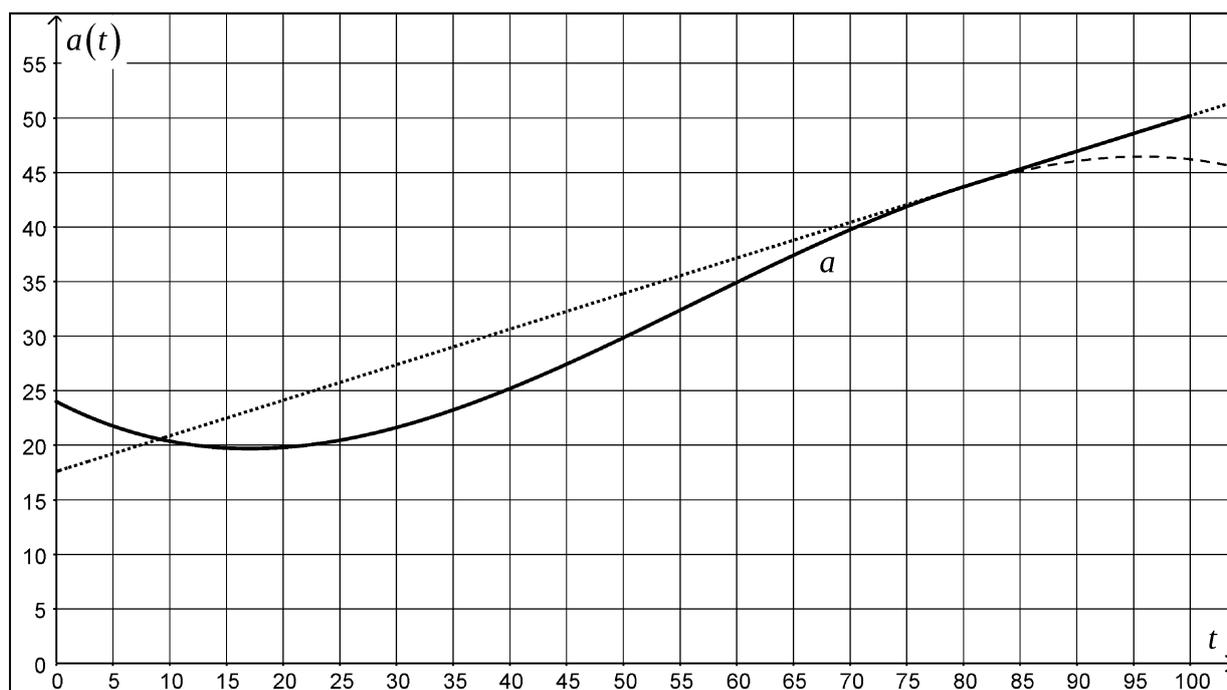
Aus der notwendigen Bedingung $a'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Näherungslösungen t_{E_1} und t_{E_2} mit $t_{E_1} \approx 17,04$ und $t_{E_2} \approx 95,69$.

$t_{E_2} \approx 95,69$ befindet sich nicht im betrachteten Intervall $[0; 80]$.

Wegen $a'(0) = -0,538 < 0$ und $a'(80) = 0,326 > 0$ liegt an der Stelle t_{E_1} ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von a' und damit ein lokales Minimum von a vor.

Wegen $a(0) = 24$, $a(t_{E_1}) \approx 19,69$ und $a(80) = 43,68$ beträgt das niedrigste Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A im Zeitraum von 1950 bis 2030 ungefähr 19,69 Jahre.

Modellösung c)

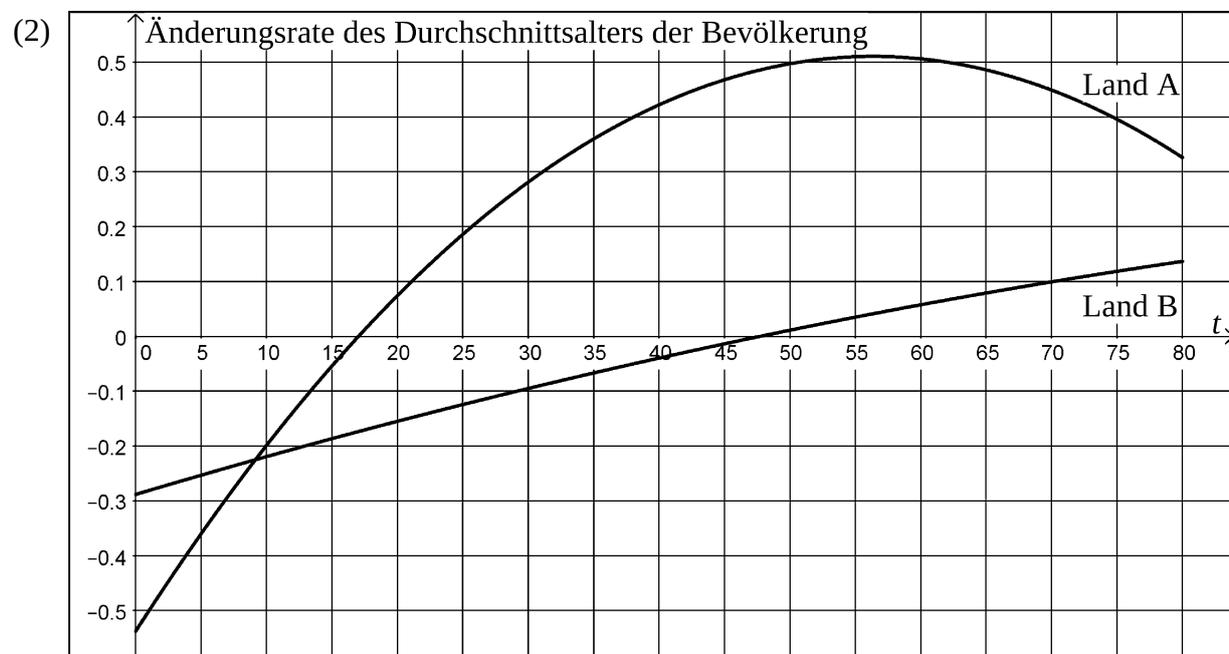


Für das Jahr 2050 ergibt sich ein Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A von ungefähr 50 Jahren.



Modellösung d)

- (1) Die Aussage ist falsch, da die Änderungsrate des Durchschnittsalters der Bevölkerung in dem Land B anfangs negativ ist und somit das Durchschnittsalter zunächst sinkt.



Durch $a'(t)$ wird die Änderungsrate des Durchschnittsalters der Bevölkerung von Land A zum Zeitpunkt t modelliert.

- (3) Die Aussage ist wahr, da im Jahr 2020 die Änderungsrate des Durchschnittsalters der Bevölkerung in dem Land A größer ist als die Änderungsrate des Durchschnittsalters der Bevölkerung in dem Land B.



7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Aufgabe 1:

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	bestimmt rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 1)$.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)			
Summe Teilaufgabe a)		4	

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) gibt die Koordinaten eines Punktes A an, in dem der Graph von f die Steigung Null hat.	1	
2	(2) gibt die Koordinaten eines Punktes $B(x_B y_B)$ an, so dass die Ableitung von f an der Stelle x_B negativ ist.	1	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2)			
Summe Teilaufgabe b)		2	

Summe Aufgabe 1		6	
------------------------	--	----------	--



Aufgabe 2:

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	ermittelt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und gibt diese in den Rechtecken im Baumdiagramm an.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)			
Summe Teilaufgabe a)		4	

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	stellt einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass es sich um eine schwarze Kugel handelt.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2)			
Summe Teilaufgabe b)		2	
Summe Aufgabe 2		6	

Aufgabe 3:

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	bestimmt (gerundet auf zwei Nachkommastellen) die Nullstellen der Funktion f .	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3)			
Summe Teilaufgabe a)		3	



Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	zeigt rechnerisch, dass $x = 2$ eine lokale Minimalstelle der Funktion f ist.	6	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)			
Summe Teilaufgabe b)		6	

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	nennt zwei Unterschiede der Graphen von f und g .	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)			
Summe Teilaufgabe c)		4	

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) zeichnet die Tangente t in die <i>Abbildung 2</i> ein.	2	
2	(2) zeigt rechnerisch, dass t auch in einem weiteren Punkt Q Tangente an den Graphen von g ist.	6	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8)			
Summe Teilaufgabe d)		8	



Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	Der Prüfling		
1	gibt an, um wie viele Einheiten der nach rechts verschobene Graph nach unten verschoben werden muss, bis die Gerade t in zwei Punkten Tangente an den neuen Graphen ist, und begründet seine Angabe.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3)			
	Summe Teilaufgabe e)	3	

	Summe Aufgabe 3	24	
--	------------------------	-----------	--

Aufgabe 4:

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	Der Prüfling		
1	bestimmt das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 1950 ($t = 0$) und den Prognosewert für das Jahr 2030 ($t = 80$).	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)			
	Summe Teilaufgabe a)	4	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	Der Prüfling		
1	ermittelt rechnerisch das niedrigste Durchschnittsalter der Bevölkerung im Zeitraum von 1950 bis 2030.	8	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8)			
	Summe Teilaufgabe b)	8	



Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	Der Prüfling		
1	ermittelt in <i>Abbildung 1</i> zeichnerisch näherungsweise das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 2050.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3)			
	Summe Teilaufgabe c)	3	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	Der Prüfling		
1	(1) beurteilt die folgende Aussage: „Das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B wächst von 1950 bis 2030 durchgängig.“	2	
2	(2) zeichnet den Graphen der Ableitungsfunktion a' in die <i>Abbildung 2</i> ein.	3	
3	(2) gibt die Bedeutung von $a'(t)$ im Sachzusammenhang an.	2	
4	(3) beurteilt die folgende Aussage: „Im Jahr 2020 wächst das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A schneller als in dem Land B.“	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9)			
	Summe Teilaufgabe d)	9	
	Summe Aufgabe 4	24	



Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	6	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	6	
Übertrag der Punktsumme aus der dritten Aufgabe	24	
Übertrag der Punktsumme aus der vierten Aufgabe	24	
Gesamtpunktzahl	60	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	52 – 60
gut	43 – 51
befriedigend	34 – 42
ausreichend	25 – 33
mangelhaft	13 – 24
ungenügend	0 – 12